Estratto da *Bollettino dei Docenti di Matematica*, numero 50, maggio 2005, Bellinzona (Svizzera), UIM-CDC, pagg. 55-68

Il senso della probabilità è impreciso

Alberto Piatti – Gianfranco Arrigo

This is the third paper about imprecise probability theory that appears in this jouMal. In this paper we propose several teaching activities involving, in different ways, imprecision and vagueness which are the principal features of imprecise probability. In particular, we expIain a geometrical representation of probability that can be helpful to analyze simple real situations characterized by three possible outcomes using imprecise probability assessments. We argue, that the use of imprecise probability assessments, and in particular of verbal probability judgements, is nearest to the personal experience of students and can motivate them to approach probability theory with a more realistic point of view.

1. Giudizi probabilistici qualitativi

Consideriamo le seguenti situazioni:

1) La squadra di calcio di Anacreon domani giocherà una partita contro la squadra Terminus. Un tuo amico ti chiede che cosa ne pensi della probabilità che vinca Anacreon. Che cosa gli risponderesti?
2) Devi organizzare una gara di sci alpino, ma non sei sicuro se in quella data vi saranno condizioni meteorologiche adatte. Chiedi un giudizio a un esperto di meteorologia sulla probabilità che in quel giorno vi sia neve a sufficienza: che tipo di giudizio esprimerà costui?

Nella prima situazione solitamente si tende a esprimere giudizi del tipo «è probabile che Anacreon vinca», oppure «è più probabile che Anacreon vinca, piuttosto che perda», oppure ancora «la probabilità che Anacreon vinca è almeno doppia rispetto a quella che perda». Al contrario, è impossibile che qualcuno, ragionevolmente, esprima un giudizio del tipo «la probabilità che Anacreon vinca è 0,75».
Quanto affermato accade praticamente in tutte le situazioni reali e si tende a esprimere giudizi probabilistici di tipo **qualitativo** e non **quantitativo**.
È importante quindi sviluppare una metodologia per combinare e analizzare il significato dei giudizi probabilistici qualitativi.
Possiamo esprimere tre tipi fondamentali di giudizi qualitativi: **classificatori**, **comparativi**, **di rapporto**.

- Un giudizio di tipo classificatorio è espresso su un unico evento A, ad esempio «A è probabile».
- Un giudizio di tipo comparativo è espresso confrontando direttamente le probabilità di due eventi, ad esempio «A è più probabile di B».
- Un giudizio di rapporto è espresso per due eventi A e B e considera il rapporto tra le loro probabilità, ad esempio «A è almeno il doppio più probabile di B».
  Un giudizio di rapporto può essere visto come un giudizio comparativo generalizzato.

Un primo punto fondamentale è riuscire a quantificare in qualche maniera i giudizi espressi a parole. Dato un certo evento A, il nostro obiettivo è esprimere la sua probabilità P(A).
I giudizi probabilistici qualitativi sono in generale piuttosto vaghi, di conseguenza sarà molto difficile ottenere un numero preciso per P(A); il caso più frequente sarà che P(A) appartiene a un intervallo:

$P(A) \in [\underline{P}(A); \overline{P}(A)]$

dove $\underline{P}(A), \overline{P}(A)$ sono in ordine le probabilità minore e maggiore (inferiore e superiore se non comprese) possibili per l'evento A, tenuto conto dei giudizi espressi.

Esempi di quantificazione

«A è probabile»: una persona che esprime un simile giudizio pensa che sia più probabile che succeda A piuttosto che $\neg A$ (non A), ma poiché $P(A)+P(\neg A)=1$, questo giudizio può essere quantificato come:

$$P(A) > \frac{1}{2}$$

Analogamente, «A è improbabile» viene ad essere espresso con

$$P(A) < \frac{1}{2}$$

«A è più probabile di B» con

$$P(A) > P(B)$$

«A è almeno il triplo più probabile di B » con

$$P(A) \geq 3 \cdot P(B)$$

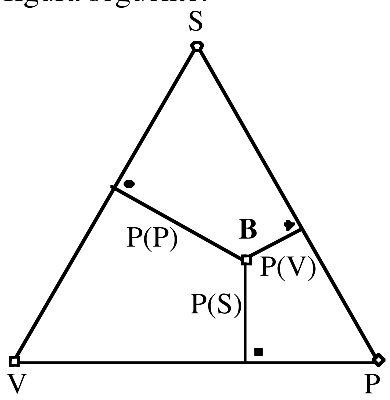
Ogni giudizio qualitativo espresso a parole viene riassunto con una o più disuguaglianze, perciò tendiamo a trovare intervalli che contengono P(A) piuttosto che valori precisi di P(A).
Consideriamo il primo esempio: una squadra di calcio che gioca contro un'altra può ottenere tre risultati possibili:

- può vincere con probabilità P(V);
- può perdere con probabilità P(S);
- può pareggiare con probabilità P(P).

Sappiamo che deve valere:

$$P(V)+P(P)+P(S)=1$$

Il nostro obiettivo è costruire l'insieme di punti $(P(V);P(P);P(S))$ compatibili con i giudizi espressi. Trattandosi di soli tre esiti, possiamo rappresentare la situazione con le cosiddette coordinate baricentriche[1]. Dato un triangolo equilatero di lato unitario, possiamo rappresentare le triple $(P(V);P(P);P(S))$ come un punto B del triangolo VPS indicato nella figura seguente:



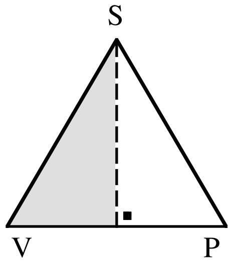
[1] Vedere in particolare la Situazione 1.

Questo tipo di rappresentazione può risultare molto utile per evidenziare le probabilità compatibili con le nostre convinzioni. Ad esempio, supponiamo di esprimere i seguenti giudizi (che devono valere simultaneamente):

G1: «È più probabile vincere che pareggiare.»
G2: «Vincere è almeno il doppio più probabile che perdere.»
G3: « È più probabile che si vinca.»

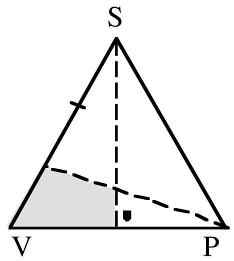
Per ogni giudizio possiamo rappresentare le probabilità possibili in un triangolo equilatero[2].

G1: $P(V) > P(P)$



Tutti i punti nella parte grigia corrispondono a triple di probabilità compatibili con il giudizio G1. Di questi punti dobbiamo trovare quelli che soddisfano anche il secondo giudizio.

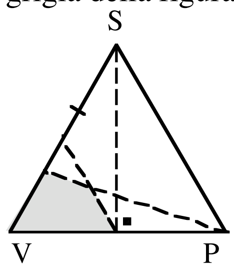
G2: $P(V) \geq 2\,P(S)$



L'insieme delle probabilità diventa più piccolo.
Incorporiamo anche il terzo giudizio:

G3: $P(V) > 0,5$

Otteniamo l'insieme di tutte le triple di probabilità compatibili con i tre giudizi: è la parte grigia della figura seguente:



Ricaviamo: $\underline{P}(V) = 0,5\,;\,\overline{P}(V) = 1$

È interessante notare che i giudizi G2 e G3 rendono ininfluente il giudizio G1. Questo caso capita spesso in situazioni reali: si possono avere informazioni **ridondanti**.

Può anche succedere di trovarsi di fronte a una situazione del tipo:

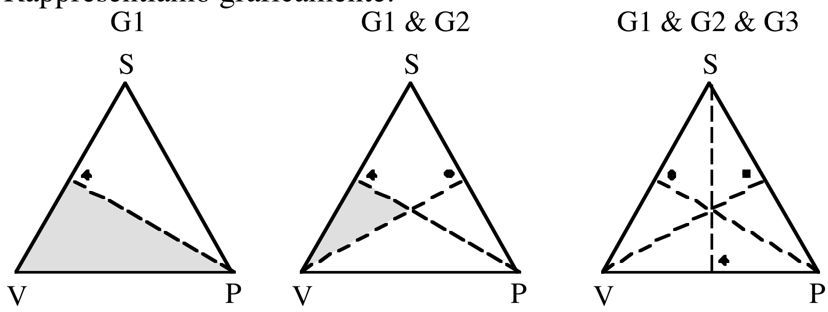
G1: «Vincere è più probabile di perdere.»
G2: «Perdere è più probabile di pareggiare.»

---

[2] Vedere la Situazione 1, attività B, C, D, E.

G3: « Pareggiare è più probabile di vincere.»

Rappresentiamo graficamente:



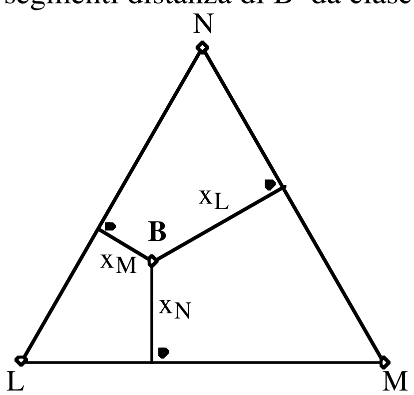
Non esiste alcun punto che soddisfi tutte e tre i giudizi. Si dice che la situazione è **incoerente**. Solitamente, quanto più giudizi vengono espressi tanto più precisa è la stima della probabilità ottenuta. Occorre pero fare attenzione, perché questa non è una regola applicabile in generale: parte dei giudizi possono risultare ridondanti. D'altra parte, gli stessi possono essere incoerenti. Si capisce anche come, disponendo di soli giudizi qualitativi, sia praticamente impossibile ottenere valori unici di probabilità[3].

È interessante notare che queste tecniche possono essere usate anche per verificare la coerenza di giudizi espressi da più persone[4] o da una persona a diversi intervalli di tempo. Ricordiamo che due giudizi sono **coerenti** se esiste almeno un punto in comune ai loro insiemi di probabilità.

2. Proposte didattiche

Situazione 1: geometria del triangolo equilatero

Costruisci con Cabri[5] un triangolo equilatero LMN e un suo punto B qualsiasi. Disegna i segmenti distanza di B da ciascuno dei suoi lati ed evidenzia le loro misure.



Attività A

Domande possibili

Tascinando B[6], che cosa succede? Esiste una posizione di B per la quale la somma $x_L + x_M + x_N$ assume un valore massimo?

---

[3] La Situazione 2 propone diversi esempi di applicazione della metodologia illustrata.

[4] Vedere Situazione 2, D.

[5] Programma di geometria dinamica in uso nelle scuole della Svizzera italiana.

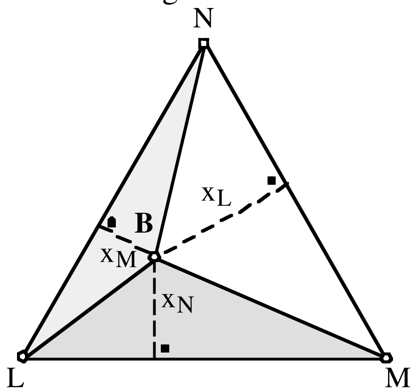
Risposte possibili
Dopo qualche sperimentazione[7], si può intuire che la somma $x_L + x_M + x_N$ rimane costante al variare della posizione di B.

Domanda
Dimostra che, per qualsiasi punto B appartenente al triangolo LMN, la somma $x_L + x_M + x_N$ è uguale alla misura dell'altezza del triangolo.

Risposta
Indichiamo con a la misura del lato del triangolo LMN e con h la sua altezza.
L'area del triangolo LMN si può esprimere così

$$\text{Area}(\text{LMN}) = \frac{1}{2}\,a\,h$$

Suddividiamo ora il triangolo LMN nei triangoli LBM, MBN e NBL. L'area di LMN dev'essere uguale alla somma delle aree di questi ultimi triangoli (vedi la figura seguente).



Si ha allora

$$\frac{1}{2}\,a\,h = \frac{1}{2}\,a\,x_N + \frac{1}{2}\,a\,x_L + \frac{1}{2}\,a\,x_M$$

$$\frac{1}{2}\,a\,h = \frac{1}{2}\,a\left(x_N + x_L + x_M\right)$$

e finalmente:

$$h = x_N + x_L + x_M$$

Poniamo ora h = 1. Allora vale la relazione: $x_L + x_M + x_N = 1$

Attività B

Domande possibili
a) Quali punti B sono tali che $x_L = 0,8$?
b) Quali punti B sono tali che $x_N > 0,5$?
c) Quali punti B sono tali che $x_M \le 0,8$?

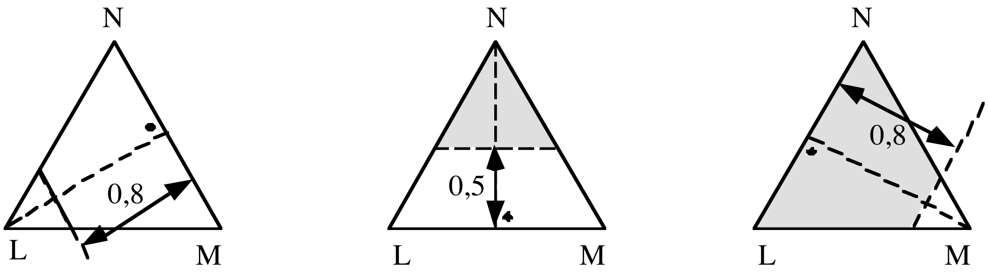
---

[6] L'operazione può essere realizzata con CABRI-Géomètre.
[7] L'esperienza risulta più suggestiva se realizzata con CABRI.

d) Quali punti B sono tali che $x_M > 1{,}1$?

e) Quali punti B sono tali che $x_L \le 1$

Risposte possibili



a) b) c)

d) Nessun punto.
e) Tutti i punti del triangolo.

Attività C

Domande possibili

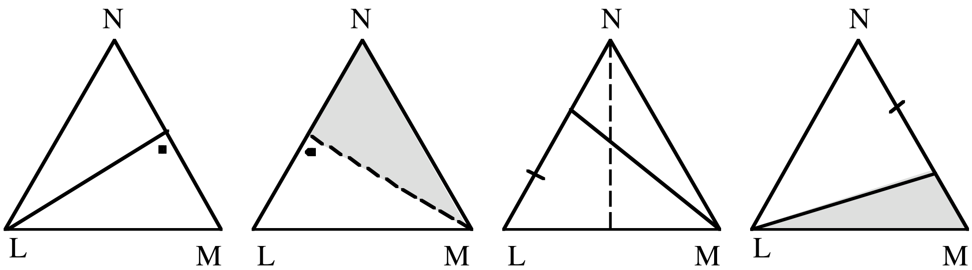
f) Quali punti B sono tali che $x_M = x_N$?

g) Quali punti B sono tali che $x_L \le x_N$?

h) Quali punti B sono tali che $x_N = 2\,x_L$?

i) Quali punti B sono tali che $x_M \ge 2\,x_N$

Risposte possibili

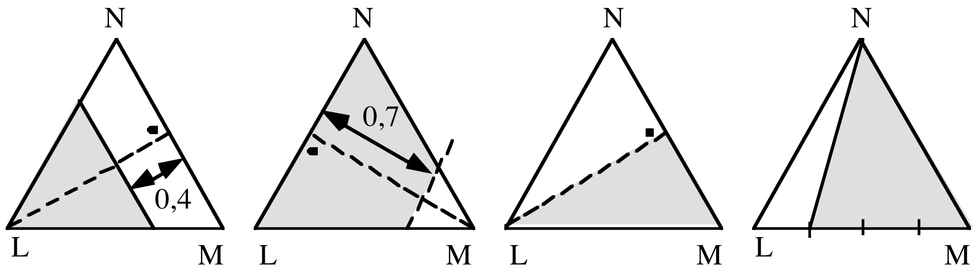


f) g) h) i)

Attività D

Domande possibili

Quali condizioni si devono porre affinché le posizioni di B siano quelle indicate da ciascuna delle figure seguenti?



j) k) l) m)

Risposte possibili

j) $x_L \geq 0,4$

k) $x_M < 0,7$

l) $x_M > x_N$

m) $x_L \leq 3\,x_M$

Attività E

Domande possibili

n) Determina quali punti B sono tali che siano simultaneamente verificate le condizioni
$$\begin{cases} x_L > x_M \\ x_M > x_N \\ x_N > 0,1 \end{cases}$$

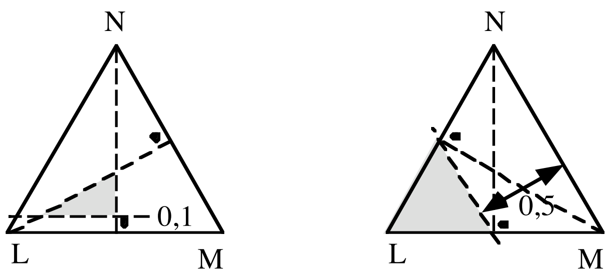
o) Determina quali punti B sono tali che siano simultaneamente verificate le condizioni
$$\begin{cases} x_L > x_M \\ x_M > x_N \\ x_N > 0,4 \end{cases}$$

p) Come interpreti la situazione precedente? In particolare: come appaiono le condizioni date?

q) Determina quali punti B sono tali che siano simultaneamente verificate le condizioni
$$\begin{cases} x_L > x_M \\ x_L > x_N \\ x_L > 0,5 \end{cases}$$

r) Come interpreti la situazione precedente? In particolare: come appare la seconda condizione?

Risposte possibili



n) q)

o) e p) Non esiste alcun punto B che soddisfa simultaneamente le condizioni date. Esse sono fra di loro incompatibili.

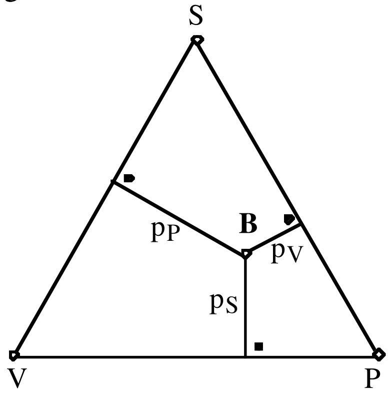
r) La terza condizione è più forte delle prime due messe insieme, le quali risultano essere ininfluenti.

Situazione 2: prove aleatorie a tre risultati possibili

La situazione precedente può essere interpretata come modello geometrico di una prova aleatoria a tre risultati possibili. Lo vediamo con l'aiuto di qualche esempio.
Una squadra sportiva (di calcio, di disco su ghiaccio, di basket, ecc.) quando disputa una partita ottiene, normalmente, uno dei tre risultati possibili:

- vittoria (V)
- pareggio (P)
- sconfitta (S)

Siano p_V, p_P, p_S le probabilità associate a ciascun esito V, P, S nell'ordine, concernente una ipotetica squadra.
Ovviamente deve valere: $p_V + p_P + p_S = 1$.
Possiamo rappresentare la situazione probabilistica mediante il modello geometrico del triangolo equilatero. Il modello ci aiuta a dedurre informazioni sulle diverse probabilità in gioco, altrimenti tutt'altro che facili da ottenere.



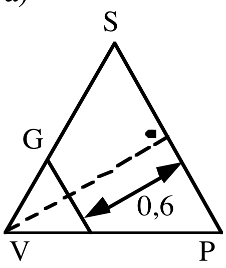
Attività A

Prime domande possibili

a) Sia $p_V = 0,6$. Quanto vale max(p_S)?
b) Sia $p_S < 0,7$. Quanto vale min(p_P)?
c) Sia $p_P \geq p_S$. Quanto vale max(p_S)?
d) Sia $\begin{cases} p_S \geq p_P \\ p_V \leq 0,6 \end{cases}$ Quanto vale min(p_S)?
e) Sia $\begin{cases} p_V \geq 3\,p_S \\ p_P > p_S \\ p_V \geq 0,4 \end{cases}$ Quanto valgono max(p_V), min(p_V) e max(p_P)?

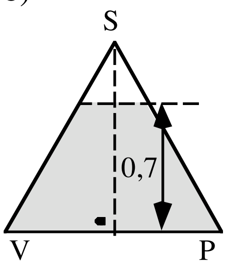
Risposte possibili

a)



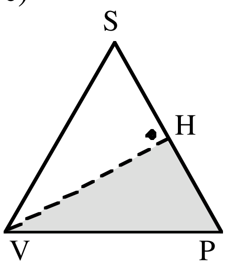
$\max(p_S) = 0{,}4$ (in G)

b)



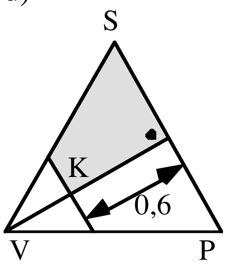
$\min(p_P) = 0$ (in V)

c)



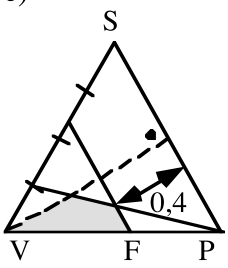
$\max(p_S) = 0{,}5$ (in H)

d)



$\min(p_S) = 0{,}2$ (in K)

e)



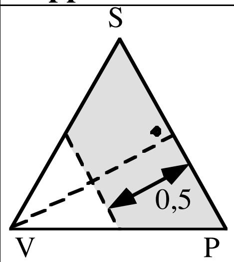
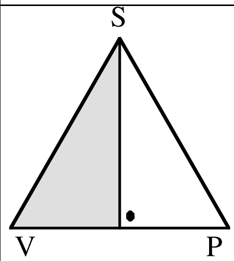
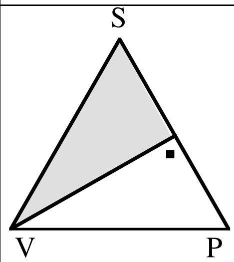
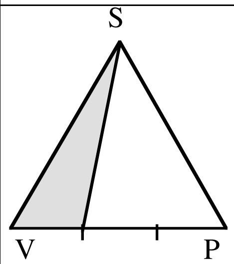
$\max(p_V)=1$ (in V), $\min(p_V)=0{,}4$ e $\max(p_P)=0{,}6$ (in F).

Attività B

Giudizi probabilistici qualitativi
Di seguito sono proposte quattro affermazioni espresse testualmente:

a) vincere è improbabile;
b) vincere è almeno probabile quanto pareggiare;
c) pareggiare è al massimo probabile quanto perdere;
d) la probabilità di vincere, pur essendo bassa, è almeno il doppio di quella di perdere.

È possibile esprimere tali affermazioni nel linguaggio matematico simbolico e darne una rappresentazione grafica, grazie al modello del triangolo equilatero.

Espressione simbolica	**Rappresentazione grafica**
$p_V < 0{,}5$	
$p_V \geq p_P$	
$p_P \leq p_S$	
$p_V \geq 2\ p_P$	

Attività C

Il gioco: "Tra i due litiganti il terzo vince"
Vi prendono parte 3 giocatori G_1, G_2, G_3. Siano p_1, p_2, p_3, nell'ordine, le loro probabilità di vincere.
A turno, ogni giocatore esprime un giudizio sulla probabilità di vincere degli altri due.
Ogni giudizio dev'essere espresso in una delle forme seguenti:

$p_i \overset{<\ >}{\underset{\le\ \ge}{}} h$ oppure $p_i \overset{<\ >}{\underset{\le\ \ge}{}} p_j \cdot k$

e dev'essere coerente con la situazione.
Vince chi ottiene la maggiore probabilità di vincere.

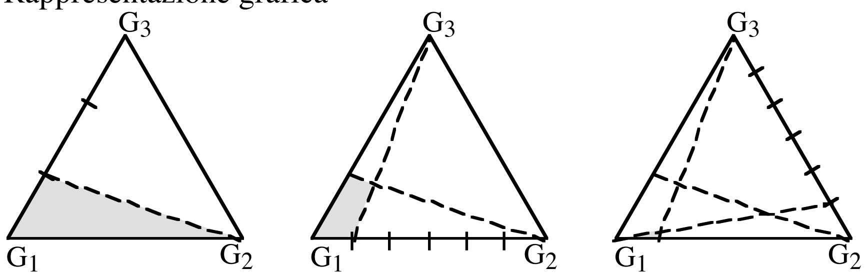
Esempio di giocata

G_2: $p_1 \ge 2\, p_3$

G_3: $p_1 > 5\, p_2$

G_1: $p_2 > 5\, p_3$

Rappresentazione grafica



giudizio di G_2 giudizio di G_3 giudizio di G_1

La giocata è vinta da G_1, il quale aveva la vittoria in tasca prima ancora di esprimere la sua condizione.
Ogni gara si compone di 3 giocate, in ciascuna delle quali inizia uno dei giocatori, a turno.
Giocate voi e scoprite perché il gioco è chiamato "Tra i due litiganti il terzo vince".

Attività D

Olimpiadi invernali: una seria preoccupazione degli organizzatori

L'organizzazione dei Giochi olimpici invernali deve assumersi rischi derivanti dalla presenza della materia prima –la neve-, il che costituisce sempre un motivo di grande preoccupazione.
Si possono verificare tre situazioni:

- M: non c'è abbastanza neve [le gare devono essere posticipate]
- S: c'è neve a sufficienza [le gare possono svolgersi regolarmente]
- T: c'è troppa neve [le gare devono essere posticipate]

Nell'imminenza della manifestazione, gli organizzatori chiedono a due esperti di meteorologia di stimare le condizioni di innevamento durante i giorni delle gare.
Ecco i responsi:

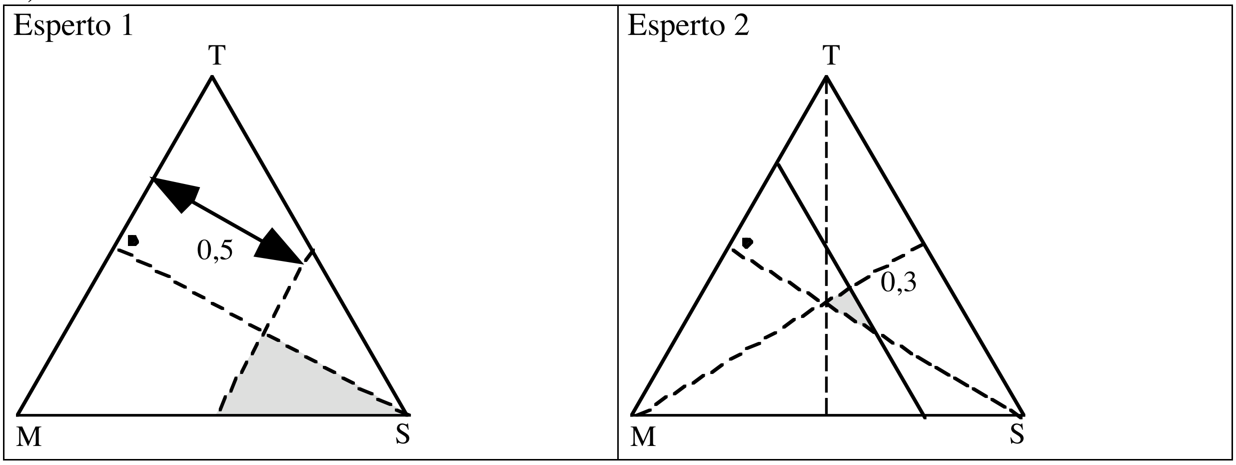
Esperto 1	Esperto 2
È probabile che ci sia neve a sufficienza. È più probabile che ci sia mancanza di neve che troppa neve.	È meno probabile che ci sia mancanza di neve che neve a sufficienza. È meno probabile che ci sia troppa neve che neve a sufficienza. È più probabile che ci sia troppa neve che mancanza di neve. Stimo la probabilità che ci sia mancanza di neve maggiore o uguale a 0,3.

Domande possibili

a) Dalle affermazioni dei due esperti, che cosa c'è da aspettarsi, circa l'effettuabilità regolare delle gare?
b) I due esperti hanno dato pareri coerenti?

Risposte possibili

a)



Il primo esperto ritiene che è maggiore la probabilità che la gara si possa tenere; infatti

$p_S > p_M + p_T$

Con i responsi del secondo esperto non è possibile formulare una previsione perché ci sono punti in cui

$p_S > p_M + p_T$

e punti in cui

$p_S < p_M + p_T$

b) Se si sovrappongono le due rappresentazioni grafiche si potrà notare che i pareri dei due esperti sono incompatibili. È pure interessante notare come, a volte, un responso più dettagliato non sia necessariamente più significativo.

3. Considerazioni didattiche

Come abbiamo già avuto modo di dire[8], per esprimere l'incertezza presente nel ragionamento e nell'inferenza probabilistici è necessario utilizzare una probabilità di tipo epistemico. Questa interpretazione preferisce la valutazione (il giudizio) piuttosto che la determinazione di valori singoli di probabilità e si esprime quindi mediante intervalli di probabilità.
Finora nella scuola si è insegnato per lo più la probabilità in senso aleatorio. In questo ambito ai vari eventi elementari si assegnano valori precisi di probabilità costruiti mediante ragionamenti teorici (basati sull'equiprobabilità) oppure mediante inferenza da calcoli statistici riferiti a prove ripetute (interpretazione frequentista). Inutile ripetere che ambedue le interpretazioni, mostrano aspetti problematici non indifferenti che si riflettono sulla qualità dell'apprendimento del neofita. Infatti proprio chi ha meno esperienza nel calcolo delle probabilità incontra maggiore difficoltà nell'interpretare risultati del tipo P(A)=0,25. Che

[8] Vedere l'articolo: Piatti A. Le diverse interpretazioni del concetto di probabilità e le loro implicazioni didattiche. *Bollettino dei docenti di matematica*, nr. 49/dicembre 2004, pagg. 105-116. UIM: Bellinzona.

senso dare a questa uguaglianza? Si sarebbe indotti a dire che «teoricamente» su cento prove aleatorie, in 25 si realizzi l'evento A. Ma in realtà lo studente stesso sa per esperienza che ciò non si avvera, se non in casi rari.
Dal punto di vista didattico, questo fatto è di fondamentale importanza perché influenza direttamente la capacità dello studente di dare senso al processo matematico che sta apprendendo. Per rendersene conto, basta riflettere sul senso che gli studenti danno spontaneamente al concetto di probabilità nella vita di tutti i giorni. Essi lo usano molto spesso -più di quanto si sia portati a pensare- ogni volta che sono chiamati a prendere decisioni in un contesto di insicurezza. «Vado a giocare a calcio o faccio un giro in bicicletta?» «Studio questa sera dopo cena o mi alzo presto domani mattina?» «Scendo lungo via San Gottardo o prendo via Guisan?»: sono interrogativi in un quadro di incertezza che giornalmente può porsi un giovane studente. È sicuro che a queste domande il giovane dà risposta ed è pure sicuro che le risposte non sono determinate da un calcolo preciso di probabilità, ma piuttosto da un ragionamento simile al seguente: «viste le condizioni attuali del traffico, è meglio che prenda per via Guisan». In questo caso il giovane opera una stima del tipo «è più probabile che…».
Siamo giunti alla nostra tesi di fondo: la concezione imprecisa della probabilità è più vicina all'esperienza pregressa dell'allievo, dunque un insegnamento aggiornato della probabilità deve tenere conto di questo concetto e deve fare in modo che l'allievo, sin dai primi passi, venga messo di fronte a situazioni di incertezza.
In questo articolo abbiamo proposto situazioni di incertezza che concernono tre eventi, situazioni che ci sembrano proponibili in parte nel secondo biennio della scuola media e sicuramente nelle classi della scuola media superiore. Il caso di tre eventi è importante perché presenta un grado di complessità maggiore del caso più usato dei due eventi, ma che si lascia ancora padroneggiare con relativa facilità grazie all'impiego delle coordinate baricentriche, quindi in un modello geometrico.
Ricordiamo che nel prossimo anno scolastico partirà una ricerca riguardante il senso[9] del concetto di probabilità. Esiste già un gruppetto di interessati, soprattutto composto di insegnanti italiani. Chi avesse interesse ad agganciarsi, si rivolga liberamente a uno degli autori del presente scritto.

[9] La ricerca si ispira a quella condotta da NRD Bologna, ASP Locarno e MESCUD Bgotà. Si veda a proposito l'articolo "Il senso dell'infinito" apparso sulla rivista *La Matematica e la sua Didattica* 4/2004, pagg. 46-83.